Linearna aproksimacija funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Linearna i kvadratna aproksimacij (i Taylorov red) služe, između ostalog, za približno računanje vrijednosti funkcije.
- Uz to, gledamo kako se promijeni vrijednost funkcije $f(x, y)$ ako se prva varijabla promijeni od x_0 do $x_0 + \triangle x$, a druga varijabla od y_0 do $y_0 + \triangle y$.

Linearna aproksimacija

Linearna aproksimacija funkcije jedne varijable u točki $x = x_0 + \triangle x$ je

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x, \quad \text{tj.}$$
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Linearna aproksimacija funkcije dvije varijable u točki (x, y), $x = x_0 + \triangle x$, $y = y_0 + \triangle y$ je

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\triangle y,$$

tj.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vidimo da ova formula uzima u obzir promjenu i po x i po y.

Primjer 1

Odredite linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

u točkama $(0.9, 2.1)$ i $(1.2, 0.95)$.

Primjer 2

Izračunajte približno duljinu dijagonale pravokutnika sa stranicama $a = 3.15$ i $b = 3.9$.

Primjer 3 - Linearna aproksimacija funkcije tri varijable

Izračunajte približno udaljenost točke $(3.2, 5.8, 6.1)$ od ishodišta.

Udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Linearna aproksimacija:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije

Za funkciju jedne varijable linearna aproksimacija

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

intrerpretira se kao **pravac**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

koji je **tangenta** na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.

Za funkciju dvije varijable linearna aproksimacija

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

intrerpretira se kao **ravnina**

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Tangencijalna ravnina

Opći oblik jednadžbe ravnine:

$$ax + by + cz = d.$$

Jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije f u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Primjer 4

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$f(x, y) = 2x + \sqrt{x^2 + 3y^2}$$

u točki $(1, -1, f(1, -1))$.

Implicitno zadana funkcija

Ako je funkcija f zadana u obliku $f(x, y) = \cdots$,

$$\text{npr. } f(x, y) = 2x + 5y + xy,$$

kažemo da je f zadana **eksplicitno**. U protivnom, f je zadana **implicitno**,

$$\text{npr. } x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0.$$

Implicitno zadana funkcija ima oblik

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Definiramo novu varijablu $z = f(x, y)$ i pišemo $F(x, y, z) = 0$.

Tangencijalna ravnina na implicitno zadanu funkciju

Jednadžba tangencijalne ravnine na graf implicitno zadane funkcije f u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Primjer 5

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0$$

u točki $(-4, 1, f(-4, 1))$ ako je $f(-4, 1) > 0$.

Veza jednadžbi za eksplicitno i implicitno zadanu funkciju

Svaku eksplicitno zadanu funkciju možemo shvatiti kao implicitnu.

Iz $z = f(x, y)$ imamo $f(x, y) - z = 0$, tj.

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Onda je

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -1$$

pa se jednadžba tangente za implicitno zadanu funkciju svodi na jednadžbu tangente za eksplicitnu.

Diferencijal

Za funkciju jedne varijable definiramo

- prirast u x
  $\rightarrow \quad \triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x)$,
- približni prirast u x
  $\rightarrow \quad \triangle f(x) \approx f'(x) \triangle x$,
- diferencijal u x
  $\rightarrow \quad df(x) = f'(x) dx$.

Analogno, za funkciju dvije varijable definiramo

- **prirast** u (x, y)
  $\rightarrow \quad \triangle f(x, y) = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y)$,
- **približni prirast** u (x, y)
  $\rightarrow \quad \triangle f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \triangle y$,
- **diferencijal** u (x, y)
  $\rightarrow \quad df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$.

Primjer 6

Izračunajte diferencijal funkcije $f(x, y) = \ln(2x + \sqrt{x^2 + 3y^2})$ u točki $(1, 1)$.

Primjer 7

Izračunajte približni prirast udaljenosti točke $(4, 3)$ od ishodišta ako joj se prva koordinata poveća za 0.1, a druga smanji za 0.05.

Kvadratna aproksimacija

Kvadratna aproksimacija funkcije jedne varijable u točki $x = x_0 + \triangle x$ je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Kvadratna aproksimacija funkcije dvije varijable u točki (x, y), $x = x_0 + \triangle x$, $y = y_0 + \triangle y$ je

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(x_0, y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{(y - y_0)^2}{2} + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Primjer 8

Odredite kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ u točki $(0.9, 2.1)$

Zadatci

1. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x,y) = \text{arctg}\frac{x^2}{y}$ u točki $(-0.99, 1.03)$.
2. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x,y) = \sqrt[3]{4xy+4}$ u točki $(1.1, 1.1)$.
3. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije $f(x,y) = xe^{y^2-x}$ u točki $(4, 2)$.
4. Izračunajte približni prirast funkcije $f(x,y) = \ln(x^2+2y)$ ako je $(x_0, y_0) = (3, 4)$, $\triangle x = 0.01$, $\triangle y = -0.04$.